数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 100-109

ルート系のLinial配置と特性準多項式

北海道大学・大学院理学研究院 吉永正彦
Masahiko Yoshinaga,
Department of Mathematics, Hokkaido University

Abstract

本稿はRIMSの研究集会「表現論と組み合わせ論」(2017年10月10日～13日)での筆者の講演 “ルート系のLinial配置と特性準多項式” の講演に基づくノートである. 内容は,

- 超平面配置 (または整数ベクトルの有限集合) に対する特性準多項式の導入,
- ルート系に付随したLinial配置の特性準多項式をルート系のEulerian多項式 (Lam-Postnikov), 基本AlcoveのEhrhart準多項式を使って表示する公式の紹介,
- 最近導入されたG-Tutte多項式の応用として得られる, 特性準多項式の最も退化したConstituentのトーラス配置における意味付け,

からなる.

本稿の目的は大きく分けて二つの目的がある. 第一に, 講演タイトルにあるとおり, ルート系のLinial配置の特性準多項式に関する結果の紹介である. 第二に, 特性準多項式そのものに対する理解の最近の進展の紹介である.

本稿の構成は以下のとおりである. §1では有限個の整数ベクトルの組に対して, Kamiya-Takemura-Teraoにより導入された特性準多項式を紹介する [10, 12]. 特性準多項式は, 端的には, “constituent” と呼ばれる多項式の有限個のリストとみなせる. その中で「素なconstituent」は, 超平面配置の最も重要な不変量である特性多項式と等しいことから特に重要であると考えられている. そのほかのconstituentsはこれまでそれほど注目を集めることはなかったと思われる. しかし最近分かってきたことは, 他のconstituentsも重要な意義を持つという事実である. 以下の二つのセクションの内容は, ともにこれらのconstituentsに関する話とみなすことができる. また, 特性準多項式が持っているGCD性という性質に関するある(ちいさな)予想を述べる.

§2ではルート系のEulerian多項式と基本AlcoveのEhrhart準多項式を使って, ルート系のLinial配置の特性準多項式を表示する公式とその応用を紹介する. この研究は, Postnikov-Stanleyによる予想「Linial配置の特性多項

式の零点が実部一定の直線上に並ぶ」を目的とした研究である. 分類を使った結果 (特に, 古典型ルート系 $(ABCD)$ に対する Postnikov-Stanley の予想の証明) は Athanasiadis [3] により得られていたが, 一般形を予想するのが困難な, 偶奇性による場合分けを含む特性多項式の表示に基づいていた. この問題は, **特性多項式ではなく, 特性準多項式を考えて初めて分類によらない記述が可能になる**. 特性準多項式のすべての constituents を考えることで, 特性多項式だけ見ていては見えなかった, 規則性を回復するといえる.

§3 は, 個々の constituent が何を表しているのか, という問題について, 最近得られた結果を手短に紹介する. L. Moci 氏等によって, 整数ベクトルのリストに対する**算術マトロイド**, **算術 Tutte 多項式**なる概念が導入されて, 活発に研究されている [6, 5, 16]. Moci 氏等の主な動機は, トーラス配置 (トーラス $(S^1)^n, (\mathbb{C}^\times)^n$ 内の部分トーラスの和集合) の組み合わせ論的構造を扱う枠組みの構築であったが, Ehrhart 理論やグラフの不変量の精密化など様々な方向へ応用されている. 筆者は最近 Ye Liu, Tan Nhat Tran との共同研究で, 可換 Lie 群 G に対して, **G-Tutte 多項式**なるものを導入した [15]. これは算術 Tutte 多項式が扱えるのが $G = S^1, \mathbb{C}^\times$ だったのに対して, 有限アーベル群も同時に扱えるようになり, 特性準多項式を含める理論展開が可能になった. 特に, 特性準多項式の constituent のうち, **もっとも退化した constituent** が, トーラス配置の補集合の Poincaré 多項式と等価な情報を含んでいることが明らかになった.

1 整数ベクトルのリストと特性準多項式

ベクトル空間, 射影空間, アフィン空間などの余次元 1 の部分空間を超平面という. 超平面の (有限枚の) 集合は**超平面配置**と呼ばれ, 様々な数学の分野で現れる [17]. その最も重要な不変量の一つに**特性多項式**と呼ばれるものがあるが, 本節ではその精密化である**特性準多項式**を導入する. 特性準多項式は, 整数係数の一次式で定義された超平面たちを対象としているが, 超平面配置の数え上げ組合せ論的側面において特に重要な対象である.

$q \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. 整数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ に対して, それを係数に持つ一次式が定める超平面

$$H_{\boldsymbol{a}} := \{(x_1, \dots, x_\ell) \mid a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell = 0\}$$

が定まるが, これを $\bmod q$ することで得られる $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の "超平面" を

$$\overline{H}_{\boldsymbol{a}} := \{(x_1, \dots, x_\ell) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \mid a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell \equiv 0 \mod q\}$$

ベクトルたちのリスト $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^\ell$ に対して, それが定める $\bmod q$ 補集合を

$$M(\mathcal{A}, q) := (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \smallsetminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_{\boldsymbol{a}_i}.$$

と記す. $M(\mathcal{A},q)$ は有限集合であり, その位数 $\#M(\mathcal{A},q)$ が q にどのように依存するのかは基本的な問題であるが, それが準多項式 (周期的な多項式) としてふるまうことが知られている.

Theorem 1.1. *(Kamiya-Takemura-Terao [10])* 上の仮定の下, 周期と呼ばれる正の整数 $\rho > 0$ と多項式 $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して, $\#M(\mathcal{A},q)$ が次のようにあらわされる.

$$\#M(\mathcal{A},q) = \begin{cases} f_1(q), & \text{if } q \equiv 1 \mod \rho \\ f_2(q), & \text{if } q \equiv 2 \mod \rho \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ f_\rho(q), & \text{if } q \equiv \rho \mod \rho. \end{cases}$$

このような周期的な多項式を**準多項式**と呼ぶ. 上の定理で主張されている準多項式を $\mathcal{A}$ の**特性準多項式**と呼び, $\chi^{\mathrm{quasi}}_{\mathcal{A}}(q)$, または $\chi^{\mathrm{quasi}}(\mathcal{A},q)$ と記す. さらに, 特性準多項式は, 次の **GCD** 性を持つことが知られている [10]:

$$(i,\rho) = (j,\rho) \Longrightarrow f_i(t) = f_j(t),$$

言い換えると, Constituents $f_i(t)$ は, ρ との最大公約数 (i,ρ) にのみ依存する. Constituents の中で, 特に $f_1(t)$ (言い換えると, $(\rho,i) = 1$ を満たす i に対する $f_i(t)$) を特性準多項式の *prime constituent* と呼ぶ. Athanasiadis [1, 3] により, prime constituent $f_1(t)$ は, $\mathcal{A}$ が定める超平面配置の特性多項式に等しいことが知られている.

Example 1.2. $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^2$ とする. $\rho = 6$ となり,

$$\#M(\mathcal{A},q) = \begin{cases} q^2 - 3q + 2, & \text{if } q \equiv 1,5 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 3, & \text{if } q \equiv 2,4 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 4, & \text{if } q \equiv 3 \mod 6 \\ q^2 - 3q + 5, & \text{if } q \equiv 0 \mod 6. \end{cases}$$

準多項式は, 様々な数え上げ問題で自然に表れる概念である [4, 20, 14]. 例えば, 有理多面体の Ehrhart 準多項式は多くの研究がなされている. しかし, Ehrhart 準多項式は一般には GCD 性をもたず, 次の問題は個人的に気になっている問題である.

Problem 1.3. *有理多面体 P の Ehrhart 準多項式はいつ GCD 性を持つか? (Ehrhart 準多項式が GCD 性を持つような有理多面体をたくさん構成せよ.)*

次節で述べる, ルート系の基本 alcove は (coweight lattice からみて) 頂点が有理数座標を持つ単体であるが, この有理単体の Ehrhart 準多項式が GCD

性を持つことが, (筆者が知る限り) 唯一の系統的な例である. この事実自体は, Suter [21] の (計算機を使った) 計算結果から直ちにわかる. 計算機や分類によらない証明は [23](次節参照) で得られている. その証明は, Kamiya-Takemura-Terao [10] に帰着される形で行われる.

準多項式の GCD 性は, 母関数の部分分数分解の係数の有理性 (本来は複素数が出てくる) として特徴づけることもできる.

最後に, 上記の問題に関する筆者の最近の観察を述べる.

Conjecture 1.4. *P を n 次元の格子ゾノトープとして, P を有理数ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Q}^n$ で平行移動して得られる有理ゾノトープを $P' = \boldsymbol{a} + P$ とする. この時, P' の Ehrhart 準多項式は GCD 性を持つだろう.*

2 ルート系の Eulerian 多項式と Ehrhart 準多項式

Φ を階数 ℓ の (既約な) ルート系として, 正系 Φ^+, 単純ルート $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ を固定する. 最高ルート $\widetilde{\alpha} \in \Phi^+$ を単純ルートの一次結合で表した表示を $\widetilde{\alpha} = c_1\alpha_1 + \cdots + c_\ell\alpha_\ell$ $(c_i \in \mathbb{Z}_{>0})$ とする. $\alpha_0 := -\widetilde{\alpha}$, $c_0 := 1$ と置くと,

$$c_0\alpha_0 + c_1\alpha_1 + \cdots + c_\ell\alpha_\ell = 0$$

という関係式が得られる. ルート格子 $\mathbb{Z}\cdot\Delta$ の双対格子を $Z(\Phi)$ とする. $Z(\Phi)\otimes\mathbb{R}$ の部分集合で

$$\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \ldots, \alpha_\ell \geq 0, \widetilde{\alpha} \leq 1,$$

で定まる単体を**基本 alcove** といい, $\overline{A^\circ}$ で表し, その Ehrhart 準多項式を

$$L_\Phi(q) := \#(Z(\Phi) \cap (q \cdot \overline{A^\circ}))$$

とする.

次に Φ の Eulerian 多項式を定義するのに必要な Weyl 群の元の ascent, dscent を導入する.

Definition 2.1. W を Φ の Weyl 群とする. $w \in W$ に対して, その ascent/descent を

$$\mathrm{asc}(w) = \sum_{i:w\alpha_i>0} c_i$$
$$\mathrm{dsc}(w) = \sum_{i:w\alpha_i<0} c_i,$$

ただし, $\mathrm{asc}(w)$ の右辺の和は, $i = 0, 1, \ldots, \ell$ の中で, $w\alpha_i \in \Phi^+$ となるもの全部にわたる和である.

次の定義は Lam-Postnikov[13] による.

Definition 2.2. f をルート系 Φ の連結指数, Φ の Eulerian 多項式 $R_\Phi(t)$ を

$$R_\Phi(t) = \frac{1}{f}\sum_{w \in W} t^{\mathrm{asc}(w)} = \frac{1}{f}\sum_{w \in W} t^{\mathrm{dsc}(w)}.$$

(上の二つの定義が一致することは, W の最長元がルートの正負を入れ替えることから従う.)

定義から自明というわけではないが, $R_\Phi(t)$ は整数係数多項式となる. 一般的な結果をいくつかのべる.

Proposition 2.3. (Lam-Postnikov [13]) h を Φ のコクセター数とする.

(1) $\deg R_\Phi(t) = h - 1$.

(2) $t^h \cdot R_\Phi(\frac{1}{t}) = R_\Phi(t)$.

(3) $R_\Phi(t) \in \mathbb{Z}[t]$.

(4) $R_{A_\ell}(t)$ は古典的な ($\mathfrak{S}_\ell$ に付随した) Eulerian polynomial.

$R_\Phi(t)$ をルート系 Φ の Eulerian 多項式と呼ぶのは, 上記 Proposition (4) により, A 型の場合は, 古典的な Eulerian 多項式となるからである.

この Proposition の証明は, 直接も可能であるが, 次の結果からも直ちに従う. 不思議なことに, 階数 ℓ のルート系 Φ の Eulerian 多項式 $R_\Phi(t)$ は, 実質的に $R_{A_\ell}(t)$ からわかるということを主張している.

Theorem 2.4. *(Lam-Postnikov [13])*

$$R_\Phi(t) = [c_0]_t \cdot [c_1]_t \cdot \cdots \cdot [c_\ell]_t \cdot R_{A_\ell}(t),$$

ただし, $[c] = \frac{t^c - 1}{t-1}$ である.

次に, Linial 配置を含む, アフィン Weyl 配置の有限部分配置のクラスを導入する. 正のルート $\alpha \in \Phi^+$ と整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して, $\alpha = k$ が定める, $Z(\Phi) \otimes \mathbb{R}$ の超平面を $H_{\alpha,k}$ と書くことにする. $a \le b$ を満たす $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathcal{A}_\Phi^{[a,b]} = \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi^+, k \in \mathbb{Z}, a \le k \le b\}.$$

これは各ルート α の値を a から b まで動かして, 平行移動した超平面を集めた (アフィン) 超平面配置である. 例えば $\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]}$ はいわゆる鏡映面配置である. 様々な研究のなされている興味深い系列として,

- (Extended) Catalan 配置 : $\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}$,

- (Extended) Shi 配置 : $\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}$,
- Linial 配置 : $\mathcal{A}_\Phi^{[1,m]}$,

などがある. このタイプの超平面配置が面白い性質を持つことは, 1990 年代後半に [8, 19] によって明らかになり, 特にその特性多項式が注目を集めている. (Catalan/Shi 配置に関するこれまでの研究に関しては [23] の Introduction 参照).

Theorem 2.5. *([2, 12, 23])* 記号は上の通りとする.

(1) (Catalan配置の特性準多項式) $m \geq 0$ とすると,

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}, q) = \frac{\#W}{f} L_\Phi(q - mh).$$

(2) (Shi配置の特性準多項式)

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}, q) = (q - mh)^\ell.$$

[23] の主結果は Linial 配置に対しても, 特性準多項式が, Ehrhart 準多項式 $L_\Phi(t)$ を使って表示できるというものである. そのために必要なシフト作用素 S を $(Sf)(q) = f(q-1)$ で定義する. 例えば上の定理から, Catalan, Shi 配置の特性準多項式をシフト作用素を使って表すと,

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[-m,m]}, q) = \frac{\#W}{f}(S^{(m+1)h} L_\Phi)(q), \quad \chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[1-m,m]}, q) = (S^{mh} q^\ell)$$

となる.

Theorem 2.6. *([23, Theorem 5.2])*

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[1,m]}, q) = (R_\Phi(S^{m+1}) L_\Phi)(q).$$

この公式からは Linial 配置に関して多くのことがわかる. 例えばこれと Eulerian 多項式の双対性と組み合わせることで,

$$\chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[1,m]}, q) = (-1)^\ell \chi^{\text{quasi}}(\mathcal{A}_\Phi^{[1,m]}, mh - q)$$

という関係式が得られる. これは Postnikov-Stanley [19] によって予想されていた関数等式の特性準多項式への一般化である. (Prime constituent を取れば, Postnikov-Stanley の予想が得られる.) また, Linial 配置の特性多項式の零点が, 実部 $\frac{mh}{2}$ の直線上に並ぶであろうという [19] の予想が $m \gg 0$ の時に成立することが (いくらか長い議論の末に) 得られる [24].

この定理の特殊な場合として, $m=0$ と置くことによって, $\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,m]}$ は空集合となるが, 定義から空な超平面配置の特性準多項式は q^{ℓ} であり, 次を得る.

$$q^{\ell}=(R_{\Phi}(S^{1})L_{\Phi})(q).$$

これは, A 型の場合は Worpitzky の公式 [22] と呼ばれているものである. これの最も簡単な場合は以下の自明な等式である.

Example 2.7. $\Phi=A_2$ とすると, $L_{A_2}(q)=\frac{(q+1)(q+2)}{2}$, $R_{A_2}(t)=t+t^2$ であり, Worpitzky の公式から次が得られる.

$$q^2=(S^2+S)\frac{(q+1)(q+2)}{2}.$$

Linial配置の特性多項式の表示は, この定理が唯一のものではなく, Athanasiadis [3] が, $ABCD$ 型の配置の特性多項式の表示を既に得ている. A 型の場合に限っても, Athanasiadis の表示と, 上の定理の Eulerian 多項式を使った表示は, 同じものを表していることは自明ではない. このように, (A 型)Linial 配置の特性多項式が, 全く異なる表示を持つことの理由を探ると, Eulerian 多項式が次の非自明な合同式を満たすことがわかる:

$$R_{A_\ell}(x^m)\equiv\left(\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{m}\right)^{\ell+1}R_{A_\ell}(x)\mod (x-1)^{\ell+1}.$$

この合同式がこれまで意識されていたのかどうかわからないが, $m=2$ の場合は Euler が, 負の偶数 s に対して $\zeta(s)=0$ となることの証明で, 実質的にこの合同式を使っている. この合同式については, [9] で詳しく調べられており, 例えばこれが Eulerian 多項式を (定数倍を除いて) 特徴づける性質であることが分かっている.

3 最も退化した Constituent

再び §1 の設定に戻り, 特性準多項式の一般論に関する最近の研究を紹介する. 既に述べた通り, 特性準多項式の Constituents $f_1(t),\dots,f_\rho(t)$ のうち, prime constituent $f_1(t)$ は, 超平面配置の特性多項式であるという重要な意味を持っていた. 他の constituents がどのような意味を持つのかを問うのは自然であろう. 最も退化した Constituent $f_\rho(t)$ がトーラス配置と関係していることが分かるので, その主張を手短に紹介する. (詳細は [15])

整数ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathbb{Z}^\ell$ に対して, それが定める指標 $((\mathbb{C}^\times)^\ell$ から $\mathbb{C}^\times$ への写像) の核

$$T_{\boldsymbol{a}}:=\{(t_1,\dots,t_\ell)^in(\mathbb{C}^\times)^\ell\mid t_1^{a_1}\cdot\dots\cdot t_\ell^{a_\ell}=1\}$$

を考える. 整数ベクトルのリスト $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \subset \mathbb{Z}^\ell$ に対して, それが定める部分トーラス配置 $\{T_{\boldsymbol{a}_1}, \ldots, T_{\boldsymbol{a}_n}\}$ を考える. この部分トーラスおよびその共通部分の連結成分たちが, 包含関係から定まる順序によって有限順序集合をなす. この順序集合の特性多項式を $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}^\times}(t)$ で表す.

Theorem 3.1. *(Liu, Tran, Yoshinaga, [15, Corollary 5.6]).*

$$f_\rho(t) = \chi_{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}^\times}(t).$$

この結果と [7, 16] の結果を合わせることで (もしくは [15, Theorem 7.7]), トーラス配置の補集合 $M = (\mathbb{C}^\times)^\ell \setminus \bigcup_i T_{\boldsymbol{a}_i}$ の Poincaré 多項式が, constituent $f_\rho(t)$ を使って

$$P_M(t) = (-t)^\ell \cdot f_\rho\left(-\frac{1+t}{t}\right)$$

とあらわされることがわかる.

Theorem の証明は [15] で導入された G-Tutte 多項式 $T_{\mathcal{A}}^G(x, y)$, およびその特殊化である G-特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^G(t)$, を使ってなされる. 一般に特性準多項式の constituent $f_k(t)$ は G-特性多項式を使って $f_k(t) = \chi_{\mathcal{A}}^{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}(t)$ とあらわされる. $k = \rho$ の場合にこれが $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathbb{C}^\times}(t)$ に等しいことが, G-Tutte 多項式の定義を見ることで分かる.

G-Tutte 多項式は, 上で見たような特性準多項式に関わる数え上げ問題やトーラス配置の位相的性質とかかわっているが, より一般に可換 Lie 群の部分群配置の補集合の Poincaré 多項式を同様に記述することもできる [15]. さらに最近明らかになった事実として, ある種のランダム有限生成アーベル群から固定された有限アーベル群 G への準同型の個数の期待値などが G-Tutte 多項式を使って記述できることが分かった. G-Tutte 多項式は他にも様々な使い道があると期待されている (例えば, §1 で述べたゾノトープの Ehrhart 準多項式の記述などに応用できないか気になるところである.)

Acknowledgement. 講演機会を頂き, また, 素晴らしい研究集会を準備してくださった世話人の和地輝仁氏に感謝いたします. 本稿のもとになった研究は, JSPS 科研費 JP25400060, JP16K13741, JP15KK0144 の助成を受けたものです.

References

[1] C. A. Athanasiadis, Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields. *Adv. Math.* **122** (1996), no. 2, 193–233.

[2] C. A. Athanasiadis, Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes. Bull. London Math. Soc. **36** (2004), no. 3, 294–302.

[3] C. A. Athanasiadis, Extended Linial hyperplane arrangements for root systems and a conjecture of Postnikov and Stanley. J. Algebraic Combin. 10 (1999), no. 3, 207–225.

[4] M. Beck and S. Robins, Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra. Undergraduate Texts in Mathematics. *Springer, New York,* 2007. xviii+226 pp.

[5] P. Brändén, L. Moci, The multivariate arithmetic Tutte polynomial. *Trans. Amer. Math. Soc.* **366** (2014), no. 10, 5523-5540.

[6] M. D'Adderio, L. Moci, Arithmetic matroids, the Tutte polynomial and toric arrangements. *Adv. in Math.* **232** (2013) 335-367.

[7] C. De Concini, C. Procesi, On the geometry of toric arrangements. *Transform. Groups* **10** (2005), no. 3-4, 387-422.

[8] P. H. Edelman and V. Reiner, Free arrangements and rhombic tilings. Discrete Comput. Geom. **15** (1996), no. 3, 307–340.

[9] K. Iijima, K. Sasaki, Y. Takahashi, M. Yoshinaga, Eulerian polynomials and polynomial congruences. arXiv:1611.10147.

[10] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. *J. Algebraic Combin.* **27** (2008), no. 3, 317–330.

[11] H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers. *Ann. Comb.* **15** (2011), no. 3, 449–464.

[12] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. *Arrangements, local systems and singularities*, 177–190, **Progr. Math., 283,** *Birkhäuser Verlag, Basel,* 2010.

[13] T. Lam and A. Postnikov, Alcoved polytopes II. arXiv preprint arXiv:1202.4015 (2012).

[14] P. Lisoněk, Combinatorial families enumerated by quasi-polynomials. *J. Combin. Theory Ser. A* **114** (2007), no. 4, 619-630

[15] Y. Liu, T. N. Tran, M. Yoshinaga, G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements. arXiv:1707.04551.

[16] L. Moci, A Tutte polynomial for toric arrangements. *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no. 2, 1067-1088.

[17] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xviii+325 pp.

[18] T. K. Petersen, Eulerian numbers. With a foreword by Richard Stanley. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser/Springer, New York, 2015. xviii+456 pp.

[19] A. Postnikov and R. Stanley, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements. J. Combin. Theory Ser. A **91** (2000), no. 1-2, 544–597.

[20] R. Stanley, Enumerative combinatorics. Volume 1. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49. *Cambridge University Press*, Cambridge, 2012. xiv+626 pp.

[21] R. Suter, The number of lattice points in alcoves and the exponents of the finite Weyl groups. *Math. Comp.* **67** (1998), no. 222, 751–758.

[22] J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerischen Zahlen. *J. reine angew. Math.* **94** (1883), 203–232.

[23] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials. (arXiv:1501.04955) To appear in *Tohoku Math. J.* (2018)

[24] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems. Preprint, arXiv:1610.07841